Școala Creștină "Filadelfia" - Cl. I-XII
Str. Narciselor, nr. 5E - Suceava Tel/fax: 0230-531205
www.filadelfia.ro office@filadelfia.ro O.P. 6 C.P. 50
Cod fiscal: *14687487* **Cont:** *25110518234002116 5015* **Banca:** *Banc Post - Suceava*

MATEMATICĂ

clasa a IX a

- frecvență redusă -

Prof. *Baran Mihaela Gabriela*

CUPRINS

Cap.1: Mulțimi şi elemente de logică matematică

1.1. Mulțimea numerelor reale

Mulțimi de numere

$\mathbb{N} = 0,1,2,3,4,.........,n,......,+\infty$ -mulțimea numerelor naturale

$\mathbb{Z} = -\infty,........,-3,-2,-1,0,1,2,3,........,n,......,+\infty$ - mulțimea numerelor intregi

$\mathbb{Q} = \left\{ x \middle| x = \frac{a}{b}; a,b \in \mathbb{Z}; b \neq 0 \right\}$-mulțimea numerelor raționale

$I = \pi; \sqrt{2}; \sqrt{3};....$ -mulțimea numerelor iraționale; mulțimea numerelor iraționale cuprinde fracțiile infinite neperiodice.

$$\begin{cases} N \subset Z \subset Q \subset R \\ I \subset R \\ Q \bigcup I = R \end{cases}$$

Observatii:

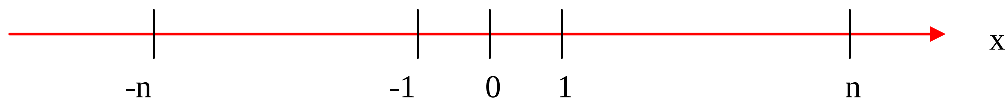
1. Orice număr natural sau intreg este şi număr rațional:

$$n = \frac{n}{1}; n \in Z$$

2. Intre două numere raționale oarecare de pe axa numerelor, există o infinitate de numere raționle.

3. Pentru reprezentarea pe axa numerelor a numerelor iraționale, vom da valori aproximative acestora.

4. Două puncte de pe axă simetrice față de originea axei au abcisele numere reale opuse.



5. Mulțimile care nu au pe 0 se notează: □ *; □ *; □ *; □ *

6. Submulțimile lui R care conțin numerele pozitive se notează: □ $_+$; □ $_+$; □ $_+$; □ $_+$

7. Submulțimile lui R care conțin numerele negative se notează: □ $_-$; □ $_-$; □ $_-$; □ $_-$

Valoarea absolută (modulul)

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

Valoarea absolută sau modulul reprezintă distanța de la originea axei la punctul de abcisă x.

<u>Proprietăți:</u>

1. $|x| \geq 0, \forall x \in$ □

2. . $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3. $|x| = x \Leftrightarrow x \geq 0$

4. $|x| = -x \Leftrightarrow x \leq 0$

5. $|x| = |-x|$

6. $|xy| = |x||y|$

7. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0$

8. $|x^n| = |x|^n, n \in \mathbb{N}^*$

Operații cu numere reale

- **Adunarea**
- **Scăderea**
- **Înmulțirea**
- **Împărțirea**
- **Puterea unui număr real**

Puterea a *n*-a, a lui *a* este : $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$, *a* se numeşte bază , iar *n* se numeşte exponent.

Proprietăți:

$\forall a, b \in \mathbb{R}^*$ şi $m, n \in \mathbb{N}$ au loc următoarele proprietăți:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$a^m : a^n = a^{m-n}$$
$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$
$$(a : b)^n = a^n : b^n$$

Observații:

$a^0 = 1;$

$1^n = 1;$

$$(-1)^n = \begin{cases} 1, & daca\ n\ par \\ -1, & daca\ n\ impar \end{cases}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

- **Radicali**

Avem:

$(\sqrt{a})^2 = a, \forall a \geq 0;$

$\sqrt{a^2} = |a|, \forall a \in \mathbb{R}.$

Proprietăți:

Oricare ar fi $a \geq 0, b \geq 0$ două numere reale au loc:

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b};$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, b \neq 0;$

$\sqrt{a^{2n}} = |a^n|, n \notin \mathbb{N}.$

Ordinea efectuării operațiilor

- Într-un exercițiu fără paranteze se efectuează mai întâi ridicările la putere sau extragerea rădăcinii, apoi înmulțirile şi împărțirile, apoi adunările şi scăderile.
- Într-un exercițiu cu paranteze se efectuează mai întâi operațiile dintre parantezele rotunde, apoi cele dintre parantezele pătrate, apoi cele dintre acolade.

EXERCIȚII REZOLVATE

1. Scrieți sub forma unei puteri:

a. $(-3)^{25} \cdot (-3)^{24}$;

b. $(-41)^{82} : (-41)^{35}$;

c. $[(-7)^3]^{11}$;

d. $(-18)^{11} : (-6)^{11}$;

e. $[(-3)\cdot 11]^{20}$;

f. $17^2 : (-17)^2$;

Rezolvare:

a. $(-3)^{25} \cdot (-3)^{24} = (-3)^{25+24} = (-3)^{49}$;

b. $(-41)^{82} : (-41)^{35} = (-41)^{82-35} = (-41)^{47}$;

c. $[(-7)^3]^{11} = (-7)^{3\cdot 11} = (-7)^{33}$;

d. $(-18)^{11} : (-6)^{11} = [(-18):(-6)]^{11} = 3^{11}$;

e. $[(-3)\cdot 11]^{20} = (-3)^{20} \cdot 11^{20}$;

f. $17^2 : (-17)^2 = [17 : (-17)]^2 = (-1)^2$;

2. Calculați:

a. $[(+7)^5]^6 : 7^{20}$;

b. $(+11)^{21} : (-11)^{10}$;

c. $(-4)^{28} : (-2)^{40}$

Rezolvare:

a. $[(+7)^5]^6 : 7^{20} = (7^5)^6 : 7^{20} = 7^{5\cdot 6} : 7^{20} = 7^{30} : 7^{20} =$

$= 7^{30-20} = 7^{10}$;

b. $(+11)^{21} : (-11)^{10} = 11^{21} : 11^{10} = 11^{21-10} = 11^{11}$;

c. $(-4)^{28} : (-2)^{40} = 4^{28} : 2^{40} = (2^2)^{28} : 2^{40} = 2^{2\cdot 28} : 2^{40} =$

$= 2^{56} : 2^{40} = 2^{56-40} = 2^{16}$;

3.Calculați:

a) $(-17) + \{(-2) - [(-4) + (-10) + 19] - 21\} + + 52$

b) $(-3)(-1)^5 + (-3)^2(-2) - (+4)(-1)^0 + (-3)(-1)^6$

c) $(-2)^{101} : 2^{99} - 10\{-3 - 3[(-3)^5 : 3^4 - 2]\}$

Rezolvare:

a) $(-17) + \{(-2) - [(-4) + (-10) + 19] - 21\} + 52 = (-17) + [(-2) - (+5) - 21] + 52 = (-17) + [(-2) + (-5) + (-21)] + 52 = (-17) + (-28) + 52 = (-45) + 52 = +7$

b) $(-3)(-1)^5 + (-3)^2(-2) - (+4)(-1)^0 + (-3)(-1)^6 = (-3)(-1) + (+9)(-2) - (+4) + (-3) = (+3) + (-18) - (+4) + (-3) = (-15) + (-4) + (-3) = -22$

c) $(-2)^{101} : 2^{99} - 10\{-3 - 3[(-3)^5 : 3^4 - 2]\} = - 2^{101} : 2^{99} - 10[-3 - 3(-3^5 : 3^4 - 2)] =$

$= - 2^2 - 10[-3 - 3(-3 - 2)] = (-4) - 10[-3 - 3(-5)] = (-4) - 10(-3+15) =$

$= (-4) - 10(+12) = (-4) - 120 = (-4) + (-120) = -124$

EXERCIȚII PROPUSE

1. Fie mulțimea A={0,(5); -4; $\frac{0}{5}$;$-\sqrt{5}$;2003^0;$\sqrt{25}$ }

a) Determinați cel mai mic şi cel mai mare element al mulțimii A

b) Enumerați elementele mulțimilor A∩Z, A∩Q, A∩(R\Q)

2. Încercuiți rezultatul corect:

1. a) $(-2)^3 \cdot (-2)^2 = (-2)^{3+2}$;

   b) $(-2)^3 \cdot (-2)^2 = (-2)^{3\cdot 2}$;

2. a) $3^6 = 3^2 \cdot 3^3$;

   b) $3^6 = 3^3 \cdot 3^3$;

3. a) $(-5)^4 \cdot (-5)^2 \cdot (-5) = (-5)^6$;

   b) $(-5)^4 \cdot (-5)^2 \cdot (-5) = (-5)^7$;

4. a) $3^2 + 3^3 = 3^5$;

   b) $3^2 + 3^3 = 9 + 27$;

5. a) $7^{12} : 7^4 = 7^{12-4}$;

   b) $7^{12} : 7^4 = 7^{12:4}$;

6. a) $(-1\cdot 9)^7 = (-1)^7 \cdot 9^7$;

   b) $(-1\cdot 9)^7 = (-1)^7 + 9^7$;

3. Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $\sqrt{25} = 5$

b) $\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 3\sqrt{10}$

c) $\sqrt{4}$ este un număr irațional

d) $\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$

e) $\sqrt{17}$ este un număr irațional

f) $\sqrt{15-\sqrt{36}} = 3$

g) $\sqrt{3^2+4^2} = 5$

4.Scoateți factori de sub radical

$\sqrt{32}$; $\sqrt{144}$; $\sqrt{360}$; $\sqrt{121}$; $\sqrt{125}$

5. Calculați:

a) $\sqrt{3}+2\sqrt{3}=$ b) $3\sqrt{5}-7\sqrt{5}=$ c) $4\sqrt{6}+\sqrt{6}-5\sqrt{6}=$ d) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=$

e) $2\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{3}=$ f) $\sqrt{25}:\sqrt{5}=$ g) $\sqrt{2+\sqrt{4}}:(-2)=$

6. Calculați:

a) $[(1-0^{11})(3^3-3^2)+1^{1998}](3^2-2^3)-3^2.2$

b) $2^{100}:[2^{64}.2^{34}+2^{65}.2^{60}:2^4.2^{23}+(3^{32}:3^{32}-1).4]$

1.2. Elemente de logică matematică

Propoziții şi predicate

Definiție: O mulțime finită de semne se numeşte alfabet.

Definiție: Se numeşte enunț orice succesiune de semne dintr-un alfaben dat.

Logica matematică studiază acele enunțuri care sunt fie adevărate, fie false.

Definiție: Se numeşte propoziție un enunț care poate fi adevărat sau fals, niciodată adevărat şi fals simultan.

Propozițiile se notează cu: p, q, r, etc.

Propozițiile sunt legate între ele cu ajutorul conectorilor logici:

„ $\neg$ ”- „non” (negația propoziției);

„ $\wedge$ ” - „şi” (conjuncția propoziției);

„ $\vee$ ”- „sau” (disjuncția propoziției);

„ $\rightarrow$ ”-„implică” (implicația propoziției);

„ $\leftrightarrow$ ”-„echivalent” (echivalența propoziției);

Dacă o propoziție este adevărată spunem că ea are ca valoare de adevăr, adevărul şi notăm „A” sau „1” .

Dacă o propoziție este falsă spunem că ea are ca valoare de adevăr falsul notăm „F” sau „0” .

Valoarea de adevăr a unei propoziții p se notează v(p).

Conectori logici

Negația propoziției

Definiție: Negația unei propoziții p este propoziția notată $\neg p$.

p	$\neg p$
1	0
0	1

Exemplu:

1. Propoziția ”România se află în Asia.” are negația „ România nu se află în Asia.”.
2. Propoziția „3<7” are negația „3≥7”.

Conjuncția propoziției

Definiție: Conjuncția a două propoziții p,q este propoziția notată p $\wedge$ q .

p	**q**	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Conjuncția a două propoziții este o propoziție adevărată doar atunci când ambele propoziții sunt adevărate şi este falsă în celelalte cazuri.

Exemple:

1.”Crapul este un peşte şi 8 este par.” este adevărată.

2. „3=5 şi 11:3” este falsă.

Disjuncția propoziției

Definiție: Disjuncția a două propoziții p,q este propoziția notată $p \vee q$.

p	**q**	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Disjuncția a două propoziții este o propoziție falsă doar atunci când ambele propoziții sunt false.

Exemple:

1. „20:4=5 sau 3·4=12” este adevărată.
2. „25:5=3 sau 12<5” este falsă.

Implicația

Definiție: Implicația propozițiilor p,q este propoziția notată p→ q.

p	q	p→q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Implicația a două propoziții este o propoziție falsă doar atunci când adevărul implică falsul.

p- premisă sau ipostază

q- concluzie

Exemplu: “3=3, pentru că 2>3.” este falsă.

Echivalența

Definiție: Echivalența propoziției p,q este propoziția p↔q.

p	q	p→q	q↔p	p↔q
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Două propoziții sunt echivalente doar atunci când ambele propoziții au aceeaşi valoare de adevăr.

Exemple:

1.”3>2 dacă şi numai dacă 5<6” este propoziție adevărată.

2. „3=5 dacă şi numai dacă urşii se hrănesc cu beton” este propoziție falsă.

Definiție:O expresie a cărui valoare de adevăr este adevărul indiferent de valorile propoziției componente se numeşte tautologie.

EXERCIȚII PROPUSE

1. Fie p şi q două propoziții. Alcătuiți tabelul valorii de adevăr pentru fiecare din propozițiile:

a) $p \leftrightarrow q$;

b) $\neg(p \vee q)$;

c) $\neg p \wedge \neg q$;

d) $p \wedge (p \to q)$.

1.3. Şiruri

Definiție: O funcție definită pe mulțimea $\mathbb{N}^*$ a numerelor naturale nenule cu valori intr-o mulțime E se numeşte şir de elemente ale mulțimii E.

Modalități de descriere a şirurilor

Şirul este un caz particular de funcție, de aceea modurile de definire a unei funcții se aplică şi pentru definirea unui şir.

a) Siruri definite descriptive

De exemplu, şirul (a_n) definit prin: $a_1=1$, $a_2=11$, $a_3=111$, …, $a_n=11\ldots1$, …

Acest şir se poate descrie astfel: fiecare termen al său se scrie cu ajutorul cifrei 1 şi numărul cifrelor este egal cu rangul termenului şirului.

b) Siruri definite cu ajutorul unei formule care permite să se găsească orice termen al şirului

De exemplu, şirul (b_n) astfel incat pentru fiecare n, b_n este dat de formula: $b_n= n^2- n +1$.

Formula care exprimă fiecare termen al şirului cu ajutorul rangului său *n*, se numeşte formula termenului al *n*- lea al şirului.

c) Modul recurent de definire a unui şir

De exemlu şirul (b_n) astfel incat $b_1=1$, $b_2=2$, $b_{n+2} = b_n + b_{n+1}$, pentru $n\geq1$.

Cunoscând primii doi termeni b_1, b_2 ai şirului şi formula putem să găsim orice termen al acestui şir: $b_3 = 1+2 =3$, $b_4 = 2+3 = 5$ …

- O formula care exprimă orice termen al şirului, de la un rang oarecare, prin precedenții, se numeşte recurență.

Progresii aritmetice

Definiție: Se numeşte progresie aritmetică un şir de numere reale, în care fiecare termen începând cu al doilea, se obține din termenul precedent, prin adăugarea aceluiaş număr r, numit rație.

Deci şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică, dacă:

$$a_n = a_{n-1} + r \text{, } n \geq 2$$

Numerele $a_1, a_2, ..., a_n$, se numesc termenii progresiei aritmetice.

Comentarii:

1) Din definiție, rezultă că într-o progresie aritmetică diferența dintre orice termen şi predecesorul său este egală cu acelaşi număr r.

2) Pentru a pune în evidență, că şirul $a_1, a_2, ..., a_n$, este o progresie aritmetică, se foloseşte notația $\div a_1, a_2, ..., a_n$.

3) O progresie aritmetică este bine determinată, dacă se cunosc primul termen a_1 şi rația r.

4) Se spune că numerele $a_1, a_2, ..., a_n$ sunt în progresie aritmetică dacă ele sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Exemple:

1) Dacă a_1= 0, r = 1, se obține progresia:

0 , 1 , 2 , 3 , 4 , … , n , …

adică şirul numerelor naturale.

2) Dacă a_1 = 2, r = 2, se obține progresia:

2 , 4 , 6 , … , 2n , …

adică şirul numerelor naturale pare.

3) Dacă a_1 = 1, r = 2, se obține progresia:

1 , 3 , 5 , … ,2n + 1, …

adică şirul numerelor naturale impare.

4) Dacă a_1 = -2 şi r = - 4, rezultă progresia aritmetică :

-2 , -6 , -10 , -14 , …

5) Dacă a_1 = - 2 şi r = 3, obţinem progresia aritmetică :

-2 , 1 , 4 , 7 , …

Proprietăţi:

1. Formula termenului general al unei progresii aritmetice:

Termenul general, al unei progresii aritmetice, este dat de formula :

$$a_n = a_1 + (n-1)r, \forall n \geq 1 \ .$$

2. Caracterizarea unei progresii aritmetice:

Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică $\Leftrightarrow$ $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \forall n \geq 2$.

3. Suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice:

Dacă şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică $\Rightarrow S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}, \forall n \geq 1$.

EXERCIŢII REZOLVATE

1. Să se determine primii patru termeni ai unei progresii aritmetice a_n , dacă:

$a_1 = -1, r = \dfrac{3}{2}$.

Rezolvare:

$$a_2 = a_1 + r = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2};$$

$$a_3 = a_2 + r = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2;$$

$$a_4 = a_3 + r = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}.$$

2. Fie $\div\ a_1, a_2, ..., a_n$ cu a_1 = 7, a_{25} = 43.

Determinaţi raţia r şi termenul a_9 .

Rezolvare:

$a_{25} = a_1 + (25 - 1)$ r $\Leftrightarrow$ 43 = 7 + 24 r $\Leftrightarrow$ 36 = 24 r $\Leftrightarrow$ $r = \frac{36}{24} = \frac{3}{2}$;

$a_9 = a_1 + (9 - 1)$ r = 7 + 8 r = 7 + 12 r = 9 .

EXERCIȚII PROPUSE

1. Să se determine al zecelea termen al şirului 1, 7, 13, 19, ...
2. Scrieți primii cinci termeni ai progresiei aritmetice în cazurile:
   a) $a_1 = -2,\ r = 3$;
   b) $a_1 = -\frac{1}{2},\ r = \frac{1}{2}$;
   c) $a_1 = \frac{1}{3},\ r = \frac{1}{2}$.
3. Progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ de rație r este definită prin anumite elemente date. Determinați, în fiecare din cazuri, elementul cerut.
   a) $a_1 = -1,\ r = -2$. Calculați a_{20}.
   b) $a_{30} = 60,\ r = 2$. Calculați a_1.
   c) $a_1 = 3,\ a_{27} = 81$. Calculați r.
   d) $a_3 = 8,\ a_4 = 5$. Calculați a_1 şi r.
4. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1 = 7$ şi $a_2 = 37$. Să se calculeze suma primilor 10 termeni ai progresiei.
5. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1 = 2$ şi $a_2 = 4$. Să se calculeze suma primilor 10 termeni ai progresiei.
6. Să se calculeze următoarele sume:
   a) 1 + 11 + 21 + 31 +...+ 111;
   b) 2+5+8+ ... +26.

Progresii geometrice

Definiție: Se numeşte progresie geometrică, un şir de numere reale : $(b_n)_{n\geq 1}$, cu $b_1 \neq 0$, în care , fiecare termen începând cu al doilea, se obține din precedentul, prin înmulțirea cu acelaşi număr q $\neq$0.

Numărul q se numeşte rația progresiei .

Observații:

1) Şirul $(b_n)_{n\geq 1}$: este progresie geometrică, dacă:

$$b_n = b_{n-1} \cdot q, \quad n \geq 2,\ b_1 \neq 0,\ q \neq 0.$$

2) Numerele : $b_1, b_2, \ldots\ldots\ldots, b_n$ se numesc termenii progresiei geometrice.

Comentarii:

1) Pentru a pune în evidență, că şirul $b_1, b_2, \ldots\ldots\ldots, b_n$, este o progresie geometrică, se foloseşte notația $\div\div\ b_1, b_2, \ldots\ldots\ldots, b_n$.

2) O progresie geometrică este bine determinată, dacă se cunosc primul termen $b_1 \neq 0$ şi rația q.

3) Se spune că numerele $b_1, b_2, \ldots\ldots\ldots, b_n$ sunt în progresie geometrică dacă ele sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

Exemple:

1) Dacă : $b_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$, se obține progresia geometrică :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots\ldots, \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots\ldots\ldots$$

2) Dacă : $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, se obține progresia geometrică:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots\ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\ldots$$

3) Dacă : $b_1 = 1$, $q = 2$ => 1 , 2 , 4 , 8 , ….., 2^{n-1} , …..

4) Dacă : $b_1 = 2$, $q = -2$ => $2, -2^2, 2^3, \ldots\ldots\ldots, (-1)^{n+1} \cdot 2^n, \ldots$

Proprietăți:

1) Formula termenului general:

Dacă şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică de rație q , atunci termenul general, are forma :

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \forall n \geq 1.$$

2) Caracterizarea progresiei geometrice:

Şirul $(b_n)_{n\geq 1}$, cu termeni nenuli, este progresie geometrică <=> pentru orice termen al său, incepând cu al doilea, avem :

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}, \quad \forall \ n \geq 2.$$

3) Suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice:

Dacă $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică, de rație q, cu : $S_n = b_1 + b_2 + \ldots\ldots\ldots + b_n$, atunci:

$$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \text{ pentru } q \neq 1.$$

EXERCIȚII PROPUSE

1) Pentru progresia geometrică: 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$,…. să se determine termenul de rang 28, respectiv 103.

2) Scrieți primii trei termeni ai progresiei geometrice în cazurile:

a) $b_1 = 3,\ q = 2$;

b) $b_1 = -1,\ q = -3$;

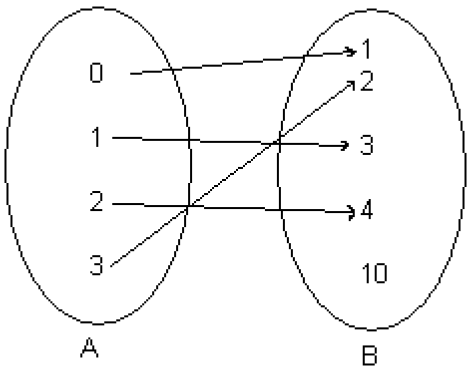
c) $b_1 = 8,\ q = \frac{1}{2}$.

3) Să se determine $x \in R$, astfel încât fiecare din tripletele următoare, să fie format din numere în progresie geometrică: a) $3x+1$, $x+3$, $9-x$; b) 4, $3+x$, $x^2+5x+4{,}25$.

Cap.2: Funcții, ecuații, inecuații

2.1. Funcții. Lecturi grafice

Fie mulțimile A={0,1,2,3} şi B={1,2,3,4,10} astfel încât



-conform diagramei de mai sus se observă că fiecărui element din mulțimea A îi corespunde un singur element din mulțimea B (între cele două mulțimi există o corespondență).Vom spune că această corespondență are loc datorită unei legi (reguli) de corespondență numită funcție, pe care o notăm cu f (sau g sau h).

<u>Notații:</u>

- $f : A \to B, f(x) = y$ **care se citeşte „f definită pe A cu valori în B, unde f de x este egal cu y" ; $x \in A$ şi $y \in B$;**

sau

- $x \mapsto f(x)$ **care se citeşte „ elementului x din A îi corespunde elementul y din B "**

sau

- $A \to B, f(x) = y$ **care se citeşte „f definită pe A cu valori în B, unde f de x este egal cu y" ; $x \in A$ şi $y \in B$;**

<u>Exemplu</u> **: -** $f : \{0,1,2,3\} \to \{1,2,3,4,10\}, f(0) = 1; f(1) = 2; f(2) = 3; f(3) = 4$

Definiție: $f : A \to B,$ se numeşte funcție dacă fiecărui element din mulțimea A îi corespunde un element şi numai unul din mulțimea B.

A= domeniu de definiție sau mulțime de definiție

B= codomeniu sau mulțimea în care funcția ia valori sau mulțimea valorilor funcției; $B = \{f(x) / x \in A\}$.

<u>Moduri de descriere a unei funcții</u>

a) prin diagramă (vezi reprezentarea inițială a funcției f)

b) prin tabel: $f:\{0,1,2,3\}\to\{1,2,3,4,10\},\ f(x)=x+1$

x	**0**	**1**	**2**	**3**
f(x)	**1**	**2**	**3**	**4**

c) prin formulă : $f:\{0,1,2,3\}\to\{1,2,3,4,10\},\ f(x)=x+1$

<u>Funcții egale:</u> două funcții sunt egale dacă au același domeniu, codomeniu și aceeași lege de corespondență.

$$f:A\to B \text{ și } g:C\to D,\ f=g \Leftrightarrow \begin{cases} A=C \\ B=D \\ f(x)=g(x) \end{cases}$$

<u>Exemplu:</u> $f,g:\{0,1,2\}\to\{0,1,2\}$

$$f(x)=x \text{ și } g(x)=x^2 \quad \Rightarrow f=g$$

Fie A={0,1,2}, B={2,3,4}

Produsul cartezian a celor două mulțimi este:

$A\times B=\{(x,y)/x\in A, y\in B\}$

$A\times B=\{(0,2),(0,3),(0,4),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4)\}$

Graficul unei funcții

Definiție: Fie o funcție f : A $\to$ B. Se numește graficul funcției f mulțimea de cupluri

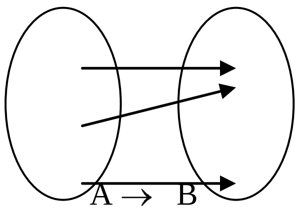
$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} = \{(x, y) \mid x \in A, y = f(x)\}$.

Se observă că $G_f \subseteq A \times B$.

<u>Exemple:</u> 1) Fie funcția f : A $\to$ B, definită prin diagrama alăturată.

Graficul funcției f este mulțimea

$G_f = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}$.



2) Fie funcția numerică f : A $\to$ B definită prin tabelul de valori.

x	-1	0	1	2
f(x)	2	3	-2	0

În acest caz, graficul lui f este mulțimea

$G_f = \{(-1, 2), (0, 3), (1, -2), (2, 0)\}$.

Ecuații de gradul I și II

Ecuația de gradul I

Definiție: O ecuație de tipul ax+b=0, unde $a,b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ se numește ecuație de gradul întâi cu o necunoscută.

În cele ce urmează prezentăm câteva elemente referitoare la rezolvarea ecuației de gradul I.

Exemplu: Să se rezolve ecuația $5x-(12x+3)=3(x-2)+25$

- Eliminăm parantezele: $5x-12x-3=3x-6+25$
- Reducem termenii asemenea: $7x-3=3x+19$
- Separăm termenii care conțin necunoscuta: $-7x-3x=19+3$
- Reducem termenii asemenea: $-10x=22$
- Împărțim prin coeficientul lui x: obținem $x=\frac{22}{-10}$ de unde $x=-\frac{11}{5}$.

EXERCIȚII PROPUSE

Să se rezolve ecuațiile:

1) $3x-1=5$
2) $1-3x=4x+2$
3) 3(x+2) +5(x-2) = 0
4) $\frac{2x+1}{3}=\frac{6x-4}{2}$

Ecuația de gradul al II- lea

Forma generală a unei ecuații de gradul al II-lea este:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

unde a,b,c sunt numere reale, cu a ≠ 0. Această ecuație se numește de gradul al II-lea cu coeficienți reali.

Rezolvarea ecuației (1) presupune determinarea tuturor soluțiilor (rădăcinilor) sale.

Existența rădăcinilor reale precum și numărul lor depind de expresia

$$b^2 - 4ac \qquad (2)$$

care se numește discriminantul ecuației de gr. al II-lea și se notează cu Δ.

Dacă discriminantul este pozitiv ($\Delta > 0$), atunci ecuația are două rădăcini reale, diferite între ele:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad (3)$$

În cazul în care Δ = 0, atunci ecuația are două soluții reale, egale:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

Dacă $\Delta<0$, atunci ecuația nu are soluții reale.

EXERCIȚII REZOLVATE

Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^2+2x+3=0$

b) $x^2-10x+25=0$

c) $x^2+3x-4=0$

d) $-2x^2+5x-3=0$

e) $2x^2-4x+1=0$

<u>Rezolvare:</u>

a) Pentru ecuația $x^2+2x+3=0$ $a=1; b=2; c=3$. Calculăm $\Delta=b^2-4ac$. Avem $\Delta=2^2-4\cdot1\cdot3=4-12=-8$. Cum $\Delta<0$ rezultă S=ϕ.

b) Pentru ecuația $x^2-10x+25=0$ $a=1; b=-10; c=25.$ Calculăm $\Delta=b^2-4ac$. Avem $\Delta=(-10)^2-4\cdot1\cdot25=100-100=0$. Cum $\Delta=0$ ecuația $x^2-10x+25=0$ se scrie $(x-5)^2=0$ şi deci $x=5$. Aşadar S=$\{5\}$.

c) Pentru ecuația $x^2+3x-4=0$ $a=1; b=3; c=-4$ şi atunci $\Delta=3^2-4\cdot1\cdot(-4)=25$. Cum $\Delta>0$ vom afla x_1 şi x_2 folosind formula: $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$. Avem

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{2\cdot1}=\frac{-3\pm5}{2}\quad \begin{cases} x_1=\dfrac{-3+5}{2}=1 \\[2mm] x_2=\dfrac{-3-5}{2}=-4 \end{cases}.$$

Aşadar S=$\{1;-4\}$.

d) Pentru ecuația $-2x^2+5x-3=0$ $a=-2; b=5; c=-3.$

$$\Delta=5^2-4\cdot(-2)\cdot(-3)=25-24=1>0;$$

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{1}}{2\cdot(-2)}=\frac{-5\pm1}{-4}\quad \begin{cases} x_1=\dfrac{-5+1}{-4}=1 \\[2mm] x_2=\dfrac{-5-1}{-4}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

. Deci S=$\left\{1;\dfrac{3}{2}\right\}$

e) Pentru ecuația $2x^2 - 4x + 1 = 0$ $\quad a = 2; b = -4; c = 1$.

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 16 - 8 = 8 > 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{4}$$

$$x_1 = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{4} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$$

$$x_2 = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{4} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{2 + \sqrt{2}}{2}; \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right\}$$

EXERCIȚII PROPUSE

1. Marcați cu un X pe A dacă propoziția este adevărată sau pe F dacă propoziția este falsă.

A	F	Mulțimea soluțiilor ecuației $ax^2 + bx = 0$ este mulțimea vidă.
A	F	Ecuația $x^2 + 5 = 0$ are două soluții reale.
A	F	Formula de rezolvare a ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ când $\Delta > 0$ este $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ unde $\Delta = b^2 - 4ac$
A	F	Ecuația $2x^2 + 3 = 0$ nu are soluții în mulțimea numerelor reale.

2. Rezolvați ecuațiile:

2.1. $5x^2 + 4x = 0$

2.2. $3x^2 - 2x = 0$, $x \in \mathbf{Z}$

2.3. $-4x^2 + 8x = 0$

2.4. $-x^2 + 5x = 0$

2.5. $(x + 3)^2 + x - 1 = 8$

2.6. $(x - 2)(x + 2) = 3x - 4$

2.7. $4x^2 - 64 = 0$

2.8. $-3x^2 + 243 = 0$

2.9. $2x^2 + 5 = 0$

2.10. $-5x^2 - 2 = 0$

2.11. $2x^2 - 16 = 0$, $x \in \mathbf{Q}$

2.12. $x^2 - 9 = 0$, $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$

2.13. $(x + 1)^2 + x = 5 + 3x$

2.14. $(x - 3)(x + 3) = 11$

2.15. $x^2 - 4x + 3 = 0$

2.16. $2x^2 + 5x - 7 = 0$

2.17. $-x^2 + 3x - 2 = 0$

2.18. $3x^2 + 4x - 7 = 0$, $x \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$

2.19. $x^2 + x + 2 = 0$

2.20. $3x^2 + 2x + 1 = 0$

3. Se dă ecuația $mx^2 + 2(m-1)x + m - 1 = 0$. Rezolvați ecuația în cazurile:

$m = -2; m = 3; m = -1; m = 2; m = -3; m = 0$.

2.3. Funcția de gradul I

Forma: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

Definiție: Fie funcția $f : A \to B$, $f(x) = y$, vom numi graficul funcției f mulțimea formată din perechile ordonate (x,y). $f : A \to B$, $G_f = \{(x, y) / f(x) = y\}$.

Monotonie:

Teoremă: Funcția de gradul întâi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b,$ a ≠ o **este:**

1) **strict crescătoare** daca a > 0
2) **strict descrescătoare** dacă a < 0 .

Observație: Semnul lui a precizează monotonia funcției de gradul întâi.

Semn:

Teoremă: Funcția de gradul întâi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b,$ a ≠ 0 are zeroul x = -b/a, iar semnul funcției este dat în tabelul de semn

x	-∞		-b/a		∞
f(x)		semn contrar lui a	0	acelaşi semn cu a	

Numărul x = -b/a este rădăcina ecuației ataşate ax + b = 0.

Reprezentarea grafică a lui G_f **:**

Fie $f : A \to B$, $f(x) = ax + b, cu; a, b \in R$,

a- coeficientul lui x;

b- termenul liber.

Pentru a reprezenta G_f într-un sistem ortogonal XOY vom proceda astfel:

- vom face tabelul de valori, în care vom lua doar două valori;

- vom completa tabelul;
- vom obține 2 puncte pe care le vom reprezenta în XOY;
- dreapta care conține cele două puncte este reprezentarea grafică a lui G_f în XOY .

Reprezentarea grafică a funcției liniare este o dreaptă .

(deoarece dreapta e reprezentată prin două puncte distincte, în tabelul de valori este suficientă luarea a două valori).

Exemplu : $f: R \to R, f(x) = 2x + 1$

$$f(-1) = 2 \cdot (-1) + 1 = -2 + 1 = -1$$
$$f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3$$
$$A(-1,-1)$$
$$B(1,3)$$

Intersecția lui G_f cu axele sistemului ortogonal XOY:

$f: R \to R,\ \ f(x) = ax + b, a \neq 0$; $G_f \cap XOY = \{M(?,0); N(0,?)\}$

$$G_f \cap OX = \{M(x,0)\} \Rightarrow M(x,0) \in G_f \Rightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Deci $G_f \cap$ **OX={M(**$-\frac{b}{a}$**,0)}**

$$G_f \cap \mathrm{OY}=\{\mathrm{N}(0,y)\} \Rightarrow N(0,y) \in G_f \Rightarrow f(0) = y \Leftrightarrow a0 + b = y \Leftrightarrow y = b$$

Exemplu : $f: R \to R,\ \ f(x) = 2x + 1, \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$

$G_f \cap$ **OX={M(**$-\frac{b}{a}$**,0)}={M(**$-\frac{1}{2}$**,0)}**

$G_f \cap$ **OY={N(0,b)}={N(0,1)}.**

Obs. : a) Punctele de intersecție a lui G_f cu axele OX şi OY se mai numesc tăieturi.

b) Putem reprezenta G_f în XOY şi prin tăieturi astfel:

- determinăm tăieturile ;
- le reprezentăm în XOY ;
- dreapta care conține cele 2 puncte este reprezentarea grafică a lui G_f

Funcții liniare pe mulțimi finite

Definiție: Fie funcția $f: A \to B, f(x) = y$, vom numi graficul funcției f mulțimea formată din perechile ordonate (x,y).

$$f: A \to B,\ G_f = \{(x,y) / f(x) = y\}.$$

Exemplu:

a) $f:\{0,1,2\}\to\{1,2,3\}$, f(x)= x+1,

f(0)=0+1=1

f(1)=1+1=2

f(2)=2+1=3

$G_f=\{A(0,1), B(1,2), C(2,3)\}$

$b) f:\{-2,-1,0,1,2\}\to\{-1,0,1\}$

$$f(x)=\begin{cases}-1, x<0\\ 0, x=0\\ 1, x>0\end{cases}$$

f(-2)=-1, f(-1)=-1, f(0)=0, f(1)=1, f(2)=1.

$G_f=\{A(-2,-1), B(-1,-1), O(0,0), C(1,1), D(2,1)\}$

EXERCIȚII PROPUSE

1) Reprezentați grafic funcția : $f:\{-4;-3;-2-1;0;1;2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x+2, dacă\ x<-1\\ -2x,\ dacă\ x\geq -1\end{cases}$

2) Reprezentați grafic funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x+2, dacă\ x<-1\\ -2x,\ dacă\ x\geq -1\end{cases}$

3) Studiați monotonia, semnul şi reprezentați grafic funcțiile:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+1$

b) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=3x+2$

c) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x)=-x+2$

4) Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+1$. Stabiliți care dintre punctele ce urmează aparțin graficului funcției: $A(-1;-1), B(0;2)$.

2.4. Inecuații de gradul I

Forma:

$ax+b \geq 0 \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0;$

$ax+b > 0 \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0;$

$ax+b \leq 0 \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0;$

$ax+b < 0 \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0;$

Rezolvare: Pentru a înțelege mai bine tehnica de rezolvare a acestor inecuații vom lua un exemplu concret:

Să se rezolve inecuația: $4x+2 \geq 2x+1$

Soluție:

$$4x+2 \geq 2x+1$$

$$4x-2x \geq 1-2$$

$$2x \geq -1$$

$$x \geq -\frac{1}{2}$$

$$x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

EXERCIȚII PROPUSE

Să se rezolve inecuațiile:

a) $2x \geq 4$

b) $3x-1 < 2$

c) $2x-1 \geq 2(2x+1)$

d) $2x \leq 4x+1$

2.5. Funcția de gradul al II – lea

Forma: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **,** $f(x)=ax^2+bx+c$ **,** $a, b, c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$.

Monotonie*:*

- a>0 –"∪"
  f(x) strict descrescătoare "↘",
  x∈$(-\infty, -\frac{b}{2a})$
  f(x) strict crescătoare "↗", x∈$(-\frac{b}{2a},\infty)$

- a<0 –"∩"
  f(x) strict crescătoare "↗",
  x∈$(-\infty, -\frac{b}{2a})$
  f(x) strict descrescătoare "↘",
  x∈$(-\frac{b}{2a},\infty)$

- a>0 –"∪"

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		∞
f(x)		↘	$-\frac{\Delta}{4a}$	↗	

- a<0 –"∩"

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		∞
f(x)		↗	$-\frac{\Delta}{4a}$	↘	

Semn:

- dacă Δ<0

x	$-\infty$		∞
$f(x)$		semnul lui a	

;

- dacă Δ=0

x	$-\infty$		$x_1 = x_2$		∞
$f(x)$		semnul lui a	0	semnul lui a	

;

- dacă Δ>0

x	$-\infty$		x_1		x_2		∞
$f(x)$		semnul lui a	0	semn contrar a	0	semnul lui a	

Intersecția cu axele:

$$G_f \cap OX : \begin{cases} y = 0 \\ f(x) = y \end{cases}$$

$$G_f \cap OY : \begin{cases} x = 0 \\ f(x) = y \end{cases}$$

Vârful parabolei:

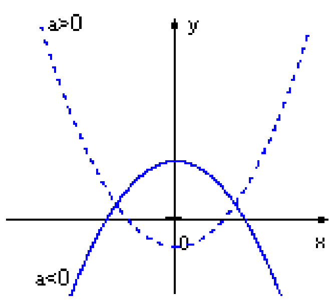
$V(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$;

dacă a>0 –"$\cup$"$\Rightarrow$ V_{min} - vârf minim;

dacă a<0 –"$\cap$"$\Rightarrow$ V_{max} – vârf maxim

Grafic:

- graficul funcției de gradul II este o parabolă;



EXERCIȚII PROPUSE

Studiați monotonia, semnul şi reprezentați grafic funcțiile:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 3$

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = -x^2 + 2x + 8$

c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = 4x^2 - 4x + 1$

2.6. Inecuații de gradul al II- lea

Forma:

$ax^2+bx+c<0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0;$

$ax^2+bx+c \leq 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0;$

$ax^2+bx+c>0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0;$

$ax^2+bx+c \geq 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0;$

Rezolvare:

- se rezolvă ecuația de gradul II atașată;
- se studiază semnul pe $\mathbb{R}$ utilizând semnul funcției de gradul II;
- soluția inecuației este acel interval sau reuniune de intervale care satisface cerințele ($<$, $>$, $\leq$, $\geq$).

EXERCIȚII PROPUSE

Să se rezolve inecuațiile:

a) $x^2-7x+12 \geq 0$

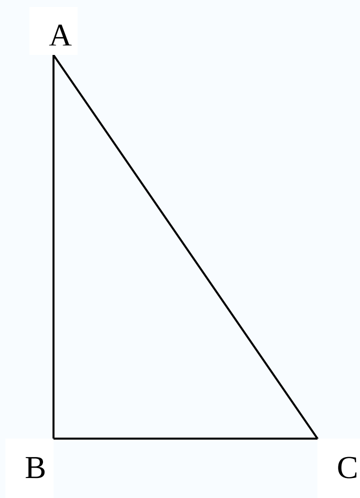
b) $-x^2+x+6 \geq 0$

c) $-x^2+1<0$

Cap3.Elemente de trigonometrie

Definiția funcțiilor trigonometrice se bazează pe rapoarte între laturi ale unui triunghi dreptunghic plan. Într-un astfel de triunghi, latura cea mai lungă, opusă unghiului drept, se numeşte ipotenuză, iar laturile care formează unghiul drept se numesc catete.

În triunghiul dreptunghic, sinusul unui unghi ascuțit este definit ca raportul dintre lungimea catetei opuse şi lungimea ipotenuzei. Similar, cosinusul unui unghi ascuțit este raportul dintre lungimea catetei alăturate şi lungimea ipotenuzei:



$$\sin A = \frac{\text{c. o.}}{\text{i.}} \qquad \cos A = \frac{\text{c. a.}}{\text{i.}}$$

Acestea sunt cele mai importante funcții trigonometrice; alte funcții pot fi definite ca diferite rapoarte ale laturilor unui triunghi dreptunghic, dar pot fi exprimate în termeni de sinus şi cosinus. Acestea sunt tangenta, cotangenta, secanta, şi cosecanta:

$$\mathrm{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\text{c. o.}}{\text{c. a.}} \qquad \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{\text{i.}}{\text{c. a.}}$$

$$\text{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\text{c. a.}}{\text{c. o.}} \qquad \text{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\text{i.}}{\text{c. o.}}$$

Definițiile anterioare se aplică doar la unghiuri între 0 şi 90 grade (0 şi π/2 radiani). Utilizând cercul unitate (un cerc cu raza de lungime 1) ele pot fi extinse la toate argumentele, pozitive şi negative.

Au loc relațiile:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \qquad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$tg 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad ctg 30^\circ = \sqrt{3}$$

$$tg 45^\circ = 1 \qquad ctg 45^\circ = 1$$

$$tg 60^\circ = \sqrt{3} \qquad ctg 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Relații trigonometrice

Există o serie de alte relații între elementele (laturi, unghiuri) triunghiurilor oarecare, relații care, folosind funcții trigonometrice, permit calculul unui element necunoscut atunci când se cunosc altele. Astfel de relații sunt de exemplu **teorema sinusurilor** şi **teorema cosinusului**.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \text{ctg } \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

<u>Teorema sinusurilor</u>

Dacă laturile unui triunghi oarecare sunt *a*, *b* şi *c* şi unghiurile opuse acestor laturi sunt *A*, *B* şi *C*, atunci teorema sinusurilor enunță:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c},$$

echivalentă cu:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

unde "R" este raza cercului circumscris triunghiului.

<u>Teorema cosinusului</u>

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

EXERCIȚII PROPUSE

1. Dacă x este un unghi ascuțit şi $\sin x = \frac{2}{3}$, să se calculeze cos*x*.
   Indicație: Se foloseşte formula $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
2. Dacă $\sin x = \frac{1}{3}$, să se calculeze tg*x*.