

Școala Creștină "Filadelfia" - Cl. I-XII

Str. Narciselor, nr. 5E - Suceava Tel/fax: 0230-531205

www.filadelfia.ro office@filadelfia.ro O.P. 6 C.P. 50

Cod fiscal: 14687487 Cont: 251105182340021165015 Banca: Banc Post - Suceava

CURS DE MATEMATICĂ FRECVENȚĂ REDUSĂ

CLASA a X a

Prof. Baran Mihaela Gabriela

CUPRINS

1. Calcul numeric

Mulțimea numerelor reale

Medii

Procente

2. Funcții, ecuații, inecuații

Funcții. Lecturi grafice

Ecuații de gradul I și II

Funcția de gradul I

Inecuații de gradul I

Funcția de gradul al II-lea

Inecuații de gradul al II-lea

3. Elemente de logică matematică

4. Elemente de trigonometrie

Cap.1: Calcul numeric

1.1. Mulțimea numerelor reale

Mulțimi de numere

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots, +\infty\}$ -mulțimea numerelor naturale

$\mathbb{Z} = \{-\infty, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots, +\infty\}$ - mulțimea numerelor întregi

$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{Z}; b \neq 0 \right\}$ -mulțimea numerelor raționale

$I = \{\pi; \sqrt{2}; \sqrt{3}; \dots\}$ -mulțimea numerelor iraționale; mulțimea numerelor iraționale cuprinde fracțiile infinite neperiodice.

$$\begin{cases} N \subset Z \subset Q \subset R \\ I \subset R \\ Q \cup I = R \end{cases}$$

Observatii:

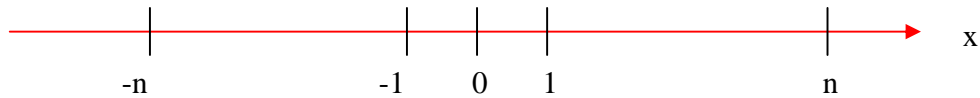
1. Orice număr natural sau întreg este și număr rațional:

$$n = \frac{n}{1}; n \in \mathbb{Z}$$

2. Intre două numere raționale oarecare de pe axa numerelor, există o infinitate de numere raționale.

3. Pentru reprezentarea pe axa numerelor a numerelor iraționale, vom da valori aproximative acestora.

4. Două puncte de pe axă simetrice față de originea axei au abscisele numere reale opuse.



5. Mulțimile care nu au pe 0 se notează: \mathbb{Q}^* ; \mathbb{R}^* ; \mathbb{Z}^* ; \mathbb{N}^*

6. Submulțimile lui \mathbb{R} care conțin numerele pozitive se notează: \mathbb{Q}_+ ; \mathbb{R}_+ ; \mathbb{Z}_+ ; \mathbb{N}_+

7. Submulțimile lui \mathbb{R} care conțin numerele negative se notează: \mathbb{Q}_- ; \mathbb{R}_- ; \mathbb{Z}_- ; \mathbb{N}_-

Valoarea absolută (modulul)

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Valoarea absolută sau modulul reprezintă distanța de la originea axei la punctul de abscisă x .

Proprietăți:

1. $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3. $|x| = x \Leftrightarrow x \geq 0$

4. $|x| = -x \Leftrightarrow x \leq 0$

5. $|x| = |-x|$

$$6. |xy| = |x||y|$$

$$7. \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0$$

$$8. |x^n| = |x|^n, n \in \mathbb{Q}^*$$

Operații cu numere reale

- Adunarea
- Scăderea
- Înmulțirea
- Împărțirea
- Puterea unui număr real

Puterea a n -a, a lui a este : $a^n = a \cdot a \cdot a \dots \cdot a$, a se numește bază , iar n se numește exponent.

Proprietăți:

$\forall a, b \in \mathbb{Q}^*$ și $m, n \in \mathbb{Q}$ au loc următoarele proprietăți:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$(a : b)^n = a^n : b^n$$

Observații:

$$a^0 = 1;$$

$$1^n = 1;$$

$$(-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{daca } n \text{ par} \\ -1, & \text{daca } n \text{ impar} \end{cases}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

➤ Radicali

Avem:

$$(\sqrt{a})^2 = a, \forall a \geq 0;$$

$$\sqrt{a^2} = |a|, \forall a \in \mathbb{R}.$$

Proprietăți:

Oricare ar fi $a \geq 0, b \geq 0$ două numere reale au loc:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b};$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, b \neq 0;$$

$$\sqrt{a^{2n}} = |a^n|, n \in \mathbb{Z}.$$

Ordinea efectuării operațiilor

- Într-un exercițiu fără paranteze se efectuează mai întâi ridicările la putere sau extragerea rădăcinii, apoi înmulțirile și împărțirile, apoi adunările și scăderile.
- Într-un exercițiu cu paranteze se efectuează mai întâi operațiile dintre parantezele rotunde, apoi cele dintre parantezele pătrate, apoi cele dintre acolade.

EXERCIȚII REZOLVATE

1. Scrieți sub forma unei puteri:

a. $(-3)^{25} \cdot (-3)^{24}$;

b. $(-41)^{82} : (-41)^{35}$;

c. $[(-7)^3]^{11}$;

d. $(-18)^{11} : (-6)^{11}$;

e. $[(-3) \cdot 11]^{20}$;

f. $17^2 : (-17)^2$;

Rezolvare:

a. $(-3)^{25} \cdot (-3)^{24} = (-3)^{25+24} = (-3)^{49}$;

b. $(-41)^{82} : (-41)^{35} = (-41)^{82-35} = (-41)^{47}$;

c. $[(-7)^3]^{11} = (-7)^{3 \cdot 11} = (-7)^{33}$;

d. $(-18)^{11} : (-6)^{11} = [(-18) : (-6)]^{11} = 3^{11}$;

e. $[(-3) \cdot 11]^{20} = (-3)^{20} \cdot 11^{20}$;

f. $17^2 : (-17)^2 = [17 : (-17)]^2 = (-1)^2$;

2. Calculați:

a. $[(+7)^5]^6 : 7^{20}$;

b. $(+11)^{21} : (-11)^{10}$;

c. $(-4)^{28} : (-2)^{40}$

Rezolvare:

a. $[(+7)^5]^6 : 7^{20} = (7^5)^6 : 7^{20} = 7^{5 \cdot 6} : 7^{20} = 7^{30} : 7^{20} =$
 $= 7^{30-20} = 7^{10}$;

b. $(+11)^{21} : (-11)^{10} = 11^{21} : 11^{10} = 11^{21-10} = 11^{11}$;

c. $(-4)^{28} : (-2)^{40} = 4^{28} : 2^{40} = (2^2)^{28} : 2^{40} = 2^{2 \cdot 28} : 2^{40} =$
 $= 2^{56} : 2^{40} = 2^{56-40} = 2^{16}$;

3. Calculați:

a) $(-17) + \{(-2) - [(-4) + (-10) + 19] - 21\} + + 52$

b) $(-3)(-1)^5 + (-3)^2(-2) - (+4)(-1)^0 + (-3)(-1)^6$

c) $(-2)^{101} : 2^{99} - 10\{-3 - 3[(-3)^5 : 3^4 - 2]\}$

Rezolvare:

a) $(-17) + \{(-2) - [(-4) + (-10) + 19] - 21\} + 52 = (-17) + [(-2) - (+5) - 21] + 52 = (-$
 $17) + [(-2) + (-5) + (-21)] + 52 = (-17) + (-28) + 52 = (-45) + 52 = +7$

b) $(-3)(-1)^5 + (-3)^2(-2) - (+4)(-1)^0 + (-3)(-1)^6 = (-3)(-1) + (+9)(-2) - (+4) + (-3) = (+3)$
 $+ (-18) - (+4) + (-3) = (-15) + (-4) + (-3) = -22$

c) $(-2)^{101} : 2^{99} - 10\{-3 - 3[(-3)^5 : 3^4 - 2]\} = -2^{101} : 2^{99} - 10[-3 - 3(-3^5 : 3^4 - 2)] =$
 $= -2^2 - 10[-3 - 3(-3 - 2)] = (-4) - 10[-3 - 3(-5)] = (-4) - 10(-3+15) =$
 $= (-4) - 10(+12) = (-4) - 120 = (-4) + (-120) = -124$

EXERCIȚII PROPUSE

1. Fie mulțimea $A = \{0, (5); -4; \frac{0}{5}; -\sqrt{5}; 2003^0; \sqrt{25}\}$

- Determinați cel mai mic și cel mai mare element al mulțimii A
- Enumerați elementele mulțimilor $A \cap \mathbb{Z}$, $A \cap \mathbb{Q}$, $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$

2. Încercuiți rezultatul corect:

- $(-2)^3 \cdot (-2)^2 = (-2)^{3+2}$;
 - $(-2)^3 \cdot (-2)^2 = (-2)^{3 \cdot 2}$;
- $3^6 = 3^2 \cdot 3^3$;
 - $3^6 = 3^3 \cdot 3^3$;
- $(-5)^4 \cdot (-5)^2 \cdot (-5) = (-5)^6$;
 - $(-5)^4 \cdot (-5)^2 \cdot (-5) = (-5)^7$;
- $3^2 + 3^3 = 3^5$;
 - $3^2 + 3^3 = 9 + 27$;
- $7^{12} : 7^4 = 7^{12-4}$;
 - $7^{12} : 7^4 = 7^{12:4}$;
- $(-1 \cdot 9)^7 = (-1)^7 \cdot 9^7$;
 - $(-1 \cdot 9)^7 = (-1)^7 + 9^7$;

3. Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:

- $\sqrt{25} = 5$
- $\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 3\sqrt{10}$
- $\sqrt{4}$ este un număr irațional
- $\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$
- $\sqrt{17}$ este un număr irațional
- $\sqrt{15 - \sqrt{36}} = 3$
- $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

4. Scoateți factori de sub radical

$$\sqrt{32}; \sqrt{144}; \sqrt{360}; \sqrt{121}; \sqrt{125}$$

5. Calculați:

$$\text{a) } \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = \quad \text{b) } 3\sqrt{5} - 7\sqrt{5} = \quad \text{c) } 4\sqrt{6} + \sqrt{6} - 5\sqrt{6} = \quad \text{d) } \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} =$$

$$\text{e) } 2\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{3} = \quad \text{f) } \sqrt{25} : \sqrt{5} = \quad \text{g) } \sqrt{2 + \sqrt{4}} : (-2) =$$

6. Calculați:

$$\text{a) } [(1 - 0^{11})(3^3 - 3^2) + 1^{1998}](3^2 - 2^3) - 3^2 \cdot 2$$

$$\text{b) } 2^{100} : [2^{64} \cdot 2^{34} + 2^{65} \cdot 2^{60} : 2^4 \cdot 2^{23} + (3^{32} : 3^{32} - 1) \cdot 4]$$

1.2. Medii

Media aritmetică

Media aritmetică a numerelor x_1, x_2, \dots, x_n se calculează cu formula:

$$m_a = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Dacă avem două numere a și b atunci media lor aritmetică este:

$$m_a = \frac{a + b}{2}$$

Exemplu: Să se calculeze media aritmetică a numerelor 4 și 8.

$$\text{Soluție: } m_a = \frac{4 + 8}{2} = \frac{12}{2} = 6.$$

Media geometrică

Media geometrică a două numere reale pozitive a și b se calculează cu formula:

$$m_g = \sqrt{a \cdot b}$$

Exemplu: Să se calculeze media geometrică a numerelor 16 și 9.

Soluție: $m_g = \sqrt{16 \cdot 9} = 12$

EXERCIȚII PROPUSE

Calculați m_a și m_g pentru numerele:

- 1) 4 și 9; 2) 10 și 8; 3) 25 și 4

1.3. Procente

În general

A este $r\%$ din B dacă $A = \frac{r}{100} \cdot B$

Exemplu: Calculați 20% din 30

Soluție: 20% din 30 = $\frac{20}{100} \cdot 30 = 6$.

EXERCITII PROPUSE

1. Calculați:

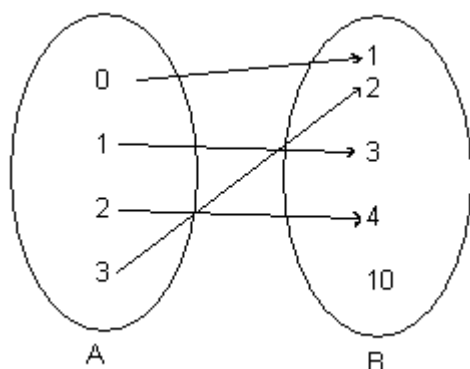
- a) 30% din 80;
- b) 7% din 200.

2. O bluză costă 350.000 lei. Dacă prețul scade cu 10%, care va fi noul preț? Dar dacă prețul crește cu 20%?

Cap.2: Funcții, ecuații, inecuații

2.1. Funcții. Lecturi grafice

Fie mulțimile $A=\{0,1,2,3\}$ și $B=\{1,2,3,4,10\}$ astfel încât



-conform diagramei de mai sus se observă că fiecărui element din mulțimea A îi corespunde un singur element din mulțimea B (între cele două mulțimi există o corespondență). Vom spune că această corespondență are loc datorită unei legi (reguli) de corespondență numită funcție, pe care o notăm cu f (sau g sau h).

Notatii:

- $f : A \rightarrow B, f(x) = y$ care se citește „ f definită pe A cu valori în B , unde f de x este egal cu y ” ;

$x \in A$ și $y \in B$;

sau

- $x \mapsto f(x)$ care se citește „elementului x din A îi corespunde elementul y din B ”

sau

- $A \rightarrow B, f(x) = y$ care se citește „ f definită pe A cu valori în B , unde f de x este egal cu y ” ;

$x \in A$ și $y \in B$;

Exemplu : - $f : \{0,1,2,3\} \rightarrow \{1,2,3,4,10\}, f(0) = 1; f(1) = 2; f(2) = 3; f(3) = 4$

Definiție: $f : A \rightarrow B$, se numește **funcție** dacă fiecărui element din mulțimea A îi corespunde un element și numai unul din mulțimea B .

$A =$ **domeniu de definiție** sau **mulțime de definiție**

$B =$ **codomeniu** sau mulțimea în care funcția ia valori sau mulțimea valorilor funcției;

$B = \{f(x) / x \in A\}$.

Moduri de descriere a unei funcții

a) **prin diagramă** (vezi reprezentarea inițială a funcției f)

b) **prin tabel:** $f : \{0,1,2,3\} \rightarrow \{1,2,3,4,10\}, f(x) = x + 1$

x	0	1	2	3
f(x)	1	2	3	4

c) **prin formulă :** $f : \{0,1,2,3\} \rightarrow \{1,2,3,4,10\}, f(x) = x + 1$

Functii egale: două funcții sunt **egale** dacă au același domeniu, codomeniu și aceeași lege de corespondență.

$$f : A \rightarrow B \text{ și } g : C \rightarrow D, f = g \Leftrightarrow \begin{cases} A = C \\ B = D \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

Exemplu: $f, g : \{0,1,2\} \rightarrow \{0,1,2\}$

$$f(x) = x \text{ și } g(x) = x^2 \Rightarrow f = g$$

Fie $A = \{0,1,2\}, B = \{2,3,4\}$

Produsul cartezian a celor două mulțimi este:

$$A \times B = \{(x, y) / x \in A, y \in B\}$$

$$A \times B = \{(0,2), (0,3), (0,4), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4)\}$$

Graficul unei funcții

Definiție: Fie o funcție $f : A \rightarrow B$. Se numește **graficul funcției** f mulțimea de cupluri

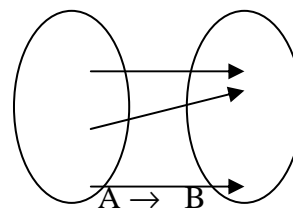
$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} = \{(x, y) \mid x \in A, y = f(x)\}.$$

Se observă că $G_f \subseteq A \times B$.

Exemple: 1) Fie funcția $f : A \rightarrow B$, definită prin diagrama alăturată.

Graficul funcției f este mulțimea

$$G_f = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}.$$



2) Fie funcția numerică $f : A \rightarrow B$ definită prin tabelul de valori.

x	-1	0	1	2
f(x)	2	3	-2	0

În acest caz, graficul lui f este mulțimea

$$G_f = \{(-1, 2), (0, 3), (1, -2), (2, 0)\}.$$

Ecuatii de gradul I și II

Ecuatia de gradul I

Definiție: O ecuație de tipul $ax+b=0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ se numește **ecuație de gradul întâi** cu o necunoscută.

În cele ce urmează prezentăm câteva elemente referitoare la rezolvarea ecuației de gradul I.

Exemplu: Să se rezolve ecuația $5x - (12x + 3) = 3(x - 2) + 25$

- Eliminăm parantezele: $5x - 12x - 3 = 3x - 6 + 25$
- Reducem termenii asemenea: $7x - 3 = 3x + 19$
- Separăm termenii care conțin necunoscuta: $-7x - 3x = 19 + 3$
- Reducem termenii asemenea: $-10x = 22$
- Împărțim prin coeficientul lui x: obținem $x = \frac{22}{-10}$ de unde $x = -\frac{11}{5}$.

EXERCIȚII PROPUSE

Să se rezolve ecuațiile:

- 1) $3x - 1 = 5$
- 2) $1 - 3x = 4x + 2$
- 3) $3(x+2) + 5(x-2) = 0$
- 4) $\frac{2x+1}{3} = \frac{6x-4}{2}$

Ecuatia de gradul al II-lea

Forma generală a unei ecuații de gradul al II-lea este:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

unde a, b, c sunt numere reale, cu $a \neq 0$. Această ecuație se numește de gradul al II-lea cu coeficienți reali.

Rezolvarea ecuației (1) presupune determinarea tuturor soluțiilor (rădăcinilor) sale.

Existența rădăcinilor reale precum și numărul lor depind de expresia

$$b^2 - 4ac \quad (2)$$

care se numește discriminantul ecuației de gr. al II-lea și se notează cu Δ .

Dacă discriminantul este pozitiv ($\Delta > 0$), atunci ecuația are două rădăcini reale, diferite între ele:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (3)$$

În cazul în care $\Delta = 0$, atunci ecuația are două soluții reale, egale:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

Dacă $\Delta < 0$, atunci ecuația nu are soluții reale.

EXERCIȚII REZOLVATE

Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^2 + 2x + 3 = 0$

b) $x^2 - 10x + 25 = 0$

c) $x^2 + 3x - 4 = 0$

d) $-2x^2 + 5x - 3 = 0$

e) $2x^2 - 4x + 1 = 0$

Rezolvare:

a) Pentru ecuația $x^2 + 2x + 3 = 0$ $a = 1; b = 2; c = 3$. Calculăm $\Delta = b^2 - 4ac$. Avem

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 = -8. \text{ Cum } \Delta < 0 \text{ rezultă } S = \emptyset.$$

b) Pentru ecuația $x^2 - 10x + 25 = 0$ $a = 1; b = -10; c = 25$. Calculăm $\Delta = b^2 - 4ac$. Avem

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 100 - 100 = 0. \text{ Cum } \Delta = 0 \text{ ecuația } x^2 - 10x + 25 = 0 \text{ se scrie } (x - 5)^2 = 0 \text{ și deci } x = 5.$$

Așadar $S = \{5\}$.

c) Pentru ecuația $x^2 + 3x - 4 = 0$ $a = 1; b = 3; c = -4$ și atunci $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$. Cum $\Delta > 0$ vom afla

$$x_1 \text{ și } x_2 \text{ folosind formula: } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}. \text{ Avem } x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 5}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{-3 + 5}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{-3 - 5}{2} = -4 \end{cases}$$

Așadar $S = \{1; -4\}$.

d) Pentru ecuația $-2x^2 + 5x - 3 = 0$ $a = -2; b = 5; c = -3$.

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-3) = 25 - 24 = 1 > 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-5 \pm 1}{-4} \begin{cases} x_1 = \frac{-5 + 1}{-4} = 1 \\ x_2 = \frac{-5 - 1}{-4} = \frac{3}{2} \end{cases}. \text{ Deci } S = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}$$

e) Pentru ecuația $2x^2 - 4x + 1 = 0$ $a = 2; b = -4; c = 1$.

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 16 - 8 = 8 > 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{4} \begin{cases} x_1 = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{4} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \\ x_2 = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{4} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \end{cases} \cdot S = \left\{ \frac{2 + \sqrt{2}}{2}; \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right\}$$

EXERCIIII PROPUSE

1. Marcați cu un X pe A dacă propoziția este adevărată sau pe F dacă propoziția este falsă.

A	F	Mulțimea soluțiilor ecuației $ax^2 + bx = 0$ este mulțimea vidă.
A	F	Ecuația $x^2 + 5 = 0$ are două soluții reale.
A	F	Formula de rezolvare a ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ când $\Delta > 0$ este $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ unde $\Delta = b^2 - 4ac$
A	F	Ecuația $2x^2 + 3 = 0$ nu are soluții în mulțimea numerelor reale.

2. Rezolvați ecuațiile:

2.1. $5x^2 + 4x = 0$

2.2. $3x^2 - 2x = 0, x \in \mathbf{Z}$

2.3. $-4x^2 + 8x = 0$

2.4. $-x^2 + 5x = 0$

2.5. $(x+3)^2 + x - 1 = 8$

2.6. $(x-2)(x+2) = 3x - 4$

2.7. $4x^2 - 64 = 0$

2.8. $-3x^2 + 243 = 0$

2.9. $2x^2 + 5 = 0$

2.10. $-5x^2 - 2 = 0$

2.11. $2x^2 - 16 = 0, x \in \mathbf{Q}$

2.12. $x^2 - 9 = 0, x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$

2.13. $(x+1)^2 + x = 5 + 3x$

2.14. $(x-3)(x+3) = 11$

2.15. $x^2 - 4x + 3 = 0$

$$2.16. 2x^2 + 5x - 7 = 0$$

$$2.17. -x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$2.18. 3x^2 + 4x - 7 = 0, x \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$$

$$2.19. x^2 + x + 2 = 0$$

$$2.20. 3x^2 + 2x + 1 = 0$$

3. Se dă ecuația $mx^2 + (2m-1)x + m - 1 = 0$. Rezolvați ecuația în cazurile:

$$m = -2; m = 3; m = -1; m = 2; m = -3; m = 0.$$

2.3. Funcția de gradul I

Forma: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$

Definiție: Fie funcția $f: A \rightarrow B, f(x) = y$, vom numi **graficul funcției f** mulțimea formată din perechile ordonate (x, y) . $f: A \rightarrow B, G_f = \{(x, y) / f(x) = y\}$.

Monotonie:

Teoremă: Funcția de gradul întâi $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a \neq 0$ este:

- 1) **strict crescătoare** dacă $a > 0$
- 2) **strict descrescătoare** dacă $a < 0$.

Observație: Semnul lui a precizează monotonia funcției de gradul întâi.

Semn:

Teoremă: Funcția de gradul întâi $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a \neq 0$ are zeroul $x = -b/a$, iar semnul funcției este dat în tabelul de semn

x	-∞	-b/a	∞
f(x)	semn contrar lui a		0
	0		același semn cu a

Numărul $x = -b/a$ este rădăcina ecuației atașate $ax + b = 0$.

Reprezentarea grafică a lui G_f :

Fie $f: A \rightarrow B, f(x) = ax + b, cu; a, b \in \mathbb{R}$,

a- coeficientul lui x ;

b- termenul liber.

Pentru a reprezenta G_f într-un sistem ortogonal XOY vom proceda astfel:

- vom face tabelul de valori, în care vom lua doar două valori;

- vom completa tabelul;
- vom obține 2 puncte pe care le vom reprezenta în XOY;
- dreapta care conține cele două puncte este reprezentarea grafică a lui G_f în XOY .

Reprezentarea grafică a funcției liniare este o dreaptă .

(deoarece dreapta e reprezentată prin două puncte distincte, în tabelul de valori este suficientă luarea a două valori).

Exemplu : $f : R \rightarrow R, f(x) = 2x + 1$

$$f(-1) = 2 \cdot (-1) + 1 = -2 + 1 = -1$$

$$f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$A(-1, -1)$$

$$B(1, 3)$$

Intersecția lui G_f cu axele sistemului ortogonal XOY:

$$f : R \rightarrow R, f(x) = ax + b, a \neq 0 ; G_f \cap XOY = \{M(?, 0); N(0, ?)\}$$

$$G_f \cap OX = \{M(x, 0)\} \Rightarrow M(x, 0) \in G_f \Rightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$\text{Deci } G_f \cap OX = \left\{ M\left(-\frac{b}{a}, 0\right) \right\}$$

$$G_f \cap OY = \{N(0, y)\} \Rightarrow N(0, y) \in G_f \Rightarrow f(0) = y \Leftrightarrow a \cdot 0 + b = y \Leftrightarrow y = b$$

Exemplu : $f : R \rightarrow R, f(x) = 2x + 1, \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$

$$G_f \cap OX = \left\{ M\left(-\frac{b}{a}, 0\right) \right\} = \left\{ M\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \right\}$$

$$G_f \cap OY = \{N(0, b)\} = \{N(0, 1)\}.$$

Obs. : a) Punctele de intersecție a lui G_f cu axele OX și OY se mai numesc tăieturi.

b) Putem reprezenta G_f în XOY și prin tăieturi astfel:

- determinăm tăieturile ;
- le reprezentăm în XOY ;
- dreapta care conține cele 2 puncte este reprezentarea grafică a lui G_f

Funcții liniare pe mulțimi finite

Definiție: Fie funcția $f : A \rightarrow B, f(x) = y$, vom numi graficul funcției f mulțimea formată din perechile ordonate (x, y) .

$$f : A \rightarrow B, G_f = \{(x, y) / f(x) = y\}.$$

Exemplu:

$$a) f : \{0,1,2\} \rightarrow \{1,2,3\}, f(x) = x+1,$$

$$f(0) = 0+1 = 1$$

$$f(1) = 1+1 = 2$$

$$f(2) = 2+1 = 3$$

$$G_f = \{A(0,1), B(1,2), C(2,3)\}$$

$$b) f : \{-2,-1,0,1,2\} \rightarrow \{-1,0,1\}$$

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

$$f(-2) = -1, f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 1.$$

$$G_f = \{A(-2,-1), B(-1,-1), O(0,0), C(1,1), D(2,1)\}$$

EXERCIIȚII PROPUSE

$$1) \text{ Reprezentați grafic funcția : } f : \{-4; -3; -2-1; 0; 1; 2\} \rightarrow \square, f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{dacă } x < -1 \\ -2x, & \text{dacă } x \geq -1 \end{cases}$$

$$2) \text{ Reprezentați grafic funcția } g : \square \rightarrow \square, f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{dacă } x < -1 \\ -2x, & \text{dacă } x \geq -1 \end{cases}$$

3) Studiați monotonia, semnul și reprezentați grafic funcțiile:

$$a) f : \square \rightarrow \square, f(x) = x+1$$

$$b) g : \square \rightarrow \square, g(x) = 3x+2$$

$$c) h : \square \rightarrow \square, h(x) = -x+2$$

4) Fie funcția $f : \square \rightarrow \square, f(x) = 2x+1$. Stabiliți care dintre punctele ce urmează aparțin graficului funcției:

$$A(-1;-1), B(0;2).$$

2.4. Inecuații de gradul I

Forma:

$$ax+b \geq 0 \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0;$$

$$ax+b > 0 \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0;$$

$$ax+b \leq 0 \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0;$$

$$ax+b < 0 \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0;$$

Rezolvare: Pentru a înțelege mai bine tehnica de rezolvare a acestor inecuații vom lua un exemplu concret:

Să se rezolve inecuația: $4x + 2 \geq 2x + 1$

Soluție:

$$4x + 2 \geq 2x + 1$$

$$4x - 2x \geq 1 - 2$$

$$2x \geq -1$$

$$x \geq -\frac{1}{2}$$

$$x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty \right)$$

EXERCIȚII PROPUSE

Să se rezolve inecuațiile:

a) $2x \geq 4$

b) $3x - 1 < 2$

c) $2x - 1 \geq 2(2x + 1)$

d) $2x \leq 4x + 1$

2.5. Funcția de gradul al II – lea

Forma: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Monotonie:

<p>$f(x)$ strict descrescătoare “\searrow”, $x \in (-\infty, -\frac{b}{2a})$ $\rightarrow a > 0$ – “\cup” $f(x)$ strict crescătoare “\nearrow”, $x \in (-\frac{b}{2a}, \infty)$</p>	<p>$f(x)$ strict crescătoare “\nearrow”, $x \in (-\infty, -\frac{b}{2a})$ $\rightarrow a < 0$ – “\cap” $f(x)$ strict descrescătoare “\searrow”, $x \in (-\frac{b}{2a}, \infty)$</p>																
<p>$\rightarrow a > 0$ – “\cup”</p>	<p>$\rightarrow a < 0$ – “\cap”</p>																
<table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 0 10px;">x</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 10px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 0 10px;">$-\frac{b}{2a}$</td> <td style="padding: 0 10px;">∞</td> </tr> <tr> <td style="padding: 0 10px;">$f(x)$</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 10px;">\searrow</td> <td style="padding: 0 10px;">$-\frac{\Delta}{4a}$</td> <td style="padding: 0 10px;">\nearrow</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	∞	$f(x)$	\searrow	$-\frac{\Delta}{4a}$	\nearrow	<table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 0 10px;">x</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 10px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 0 10px;">$-\frac{b}{2a}$</td> <td style="padding: 0 10px;">∞</td> </tr> <tr> <td style="padding: 0 10px;">$f(x)$</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 10px;">\nearrow</td> <td style="padding: 0 10px;">$-\frac{\Delta}{4a}$</td> <td style="padding: 0 10px;">\searrow</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	∞	$f(x)$	\nearrow	$-\frac{\Delta}{4a}$	\searrow
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	∞														
$f(x)$	\searrow	$-\frac{\Delta}{4a}$	\nearrow														
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	∞														
$f(x)$	\nearrow	$-\frac{\Delta}{4a}$	\searrow														

Semn:

\rightarrow dacă $\Delta < 0$ $\frac{x}{f(x)}$ | $-\infty$ $\frac{\infty}{\text{semnul lui } a}$;

\rightarrow dacă $\Delta = 0$ $\frac{x}{f(x)}$ | $-\infty$ $x_1 = x_2$ $\frac{\infty}{\text{semnul lui } a}$;

\rightarrow dacă $\Delta > 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	∞
$f(x)$	semnul lui a	0	semn contrar a 0	semnul lui a

Intersecția cu axele:

$$G_f \cap OX : \begin{cases} y = 0 \\ f(x) = y \end{cases}$$

$$G_f \cap OY : \begin{cases} x = 0 \\ f(x) = y \end{cases}$$

Vârful parabolei:

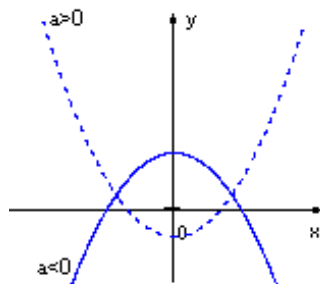
$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right);$$

dacă $a > 0$ – “∪” ⇒ V_{\min} – vârf minim;

dacă $a < 0$ – “∩” ⇒ V_{\max} – vârf maxim

Grafic:

➤ graficul funcției de gradul II este o **parabolă**;



EXERCIȚII PROPUSE

Studiați monotonia, semnul și reprezentați grafic funcțiile:

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 3$

b) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -x^2 + 2x + 8$

c) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = 4x^2 - 4x + 1$

2.6. Inecuații de gradul al II-lea

Forma:

$$ax^2+bx+c<0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0;$$

$$ax^2+bx+c \leq 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0;$$

$$ax^2+bx+c>0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0;$$

$$ax^2+bx+c \geq 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0;$$

Rezolvare:

- se rezolvă ecuația de gradul II atașată;
- se studiază semnul pe \mathbb{R} utilizând semnul funcției de gradul II;
- soluția inecuației este acel interval sau reuniune de intervale care satisface cerințele ($<$, $>$, \leq , \geq).

EXERCIȚII PROPUSE

Să se rezolve inecuațiile:

a) $x^2 - 7x + 12 \geq 0$

b) $-x^2 + x + 6 \geq 0$

c) $-x^2 + 1 < 0$

Cap.3: Elemente de logică matematică

Propoziții și predicate

Definiție: O mulțime finită de semne se numește **alfabet**.

Definiție: Se numește **enunț** orice succesiune de semne dintr-un alfabet dat.

Logica matematică studiază acele enunțuri care sunt fie adevărate, fie false.

Definiție: Se numește **propoziție** un enunț care poate fi adevărat sau fals, niciodată adevărat și fals simultan.

Propozițiile se notează cu: p, q, r, etc.

Propozițiile sunt legate între ele cu ajutorul conectorilor logici:

- „ \neg ” - „non” (negația propoziției);
- „ \wedge ” - „și” (conjuncția propoziției);
- „ \vee ” - „sau” (disjuncția propoziției);
- „ \rightarrow ” - „implică” (implicația propoziției);
- „ \leftrightarrow ” - „echivalent” (echivalența propoziției);

Dacă o propoziție este adevărată spunem că ea are ca valoare de adevăr, adevărul și notăm „A” sau „1” .

Dacă o propoziție este falsă spunem că ea are ca valoare de adevăr falsul notăm „F” sau „0” .

Valoarea de adevăr a unei propoziții p se notează $v(p)$.

Conectori logici

Negația propoziției

Definiție: Negația unei propoziții p este propoziția notată $\neg p$.

p	$\neg p$
1	0
0	1

Exemplu:

1. Propoziția "România se află în Asia." are negația „România nu se află în Asia.”.
2. Propoziția „ $3 < 7$ ” are negația „ $3 \geq 7$ ”.

Conjunția propoziției

Definiție: Conjunția a două propoziții p, q este propoziția notată $p \wedge q$.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Conjunția a două propoziții este o propoziție adevărată doar atunci când ambele propoziții sunt adevărate și este falsă în celelalte cazuri.

Exemple:

1. "Crapul este un pește și 8 este par." este adevărată.
2. „ $3=5$ și $11:3$ ” este falsă.

Disjuncția propoziției

Definiție: Disjuncția a două propoziții p, q este propoziția notată $p \vee q$.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Disjuncția a două propoziții este o propoziție falsă doar atunci când ambele propoziții sunt false.

Exemple:

2. „ $20:4=5$ sau $3 \cdot 4=12$ ” este adevărată.
3. „ $25:5=3$ sau $12 < 5$ ” este falsă.

Implicatia

Definiție: Implicatia propozițiilor p, q este propoziția notată $p \rightarrow q$.

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Implicatia a două propoziții este o propoziție falsă doar atunci când adevărul implică falsul.

p - premisă sau ipostază

q- concluzie

Exemplu: “ $3=3$, pentru că $2>3$.” este falsă.

Echivalența

Definiție: Echivalența propoziției p,q este propoziția $p \leftrightarrow q$.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \leftrightarrow p$	$p \leftrightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Două propoziții sunt echivalente doar atunci când ambele propoziții au aceeași valoare de adevăr.

Exemple:

1. „ $3>2$ dacă și numai dacă $5<6$ ” este propoziție adevărată.

2. „ $3=5$ dacă și numai dacă urșii se hrănesc cu beton” este propoziție falsă.

Definiție: O expresie a cărei valoare de adevăr este adevărul indiferent de valorile propoziției componente se numește **tautologie**.

EXERCIȚII PROPUSE

1. Fie p și q două propoziții. Alcătuiți tabelul valorii de adevăr pentru fiecare din propozițiile:

b) $p \leftrightarrow q$;

c) $\neg(p \vee q)$;

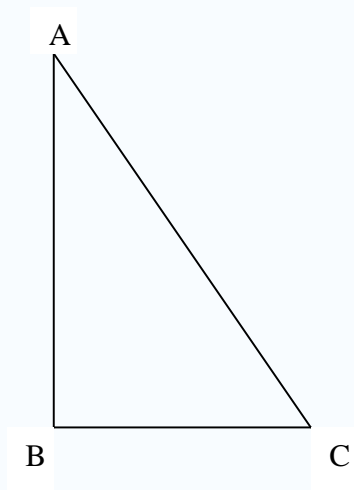
d) $\neg p \wedge \neg q$;

e) $p \wedge (p \rightarrow q)$.

Cap.4: Elemente de trigonometrie

Definiția funcțiilor trigonometrice se bazează pe rapoarte între laturi ale unui triunghi dreptunghic plan. Într-un astfel de triunghi, latura cea mai lungă, opusă unghiului drept, se numește **ipotenuză**, iar laturile care formează unghiul drept se numesc **catete**.

În triunghiul dreptunghic, **sinusul** unui unghi ascuțit este definit ca raportul dintre lungimea catetei opuse și lungimea ipotenuzei. Similar, **cosinusul** unui unghi ascuțit este raportul dintre lungimea catetei alăturate și lungimea ipotenuzei:



$$\sin A = \frac{\text{c. o.}}{\text{i.}} \quad \cos A = \frac{\text{c. a.}}{\text{i.}}$$

Acestea sunt cele mai importante funcții trigonometrice; alte funcții pot fi definite ca diferite rapoarte ale laturilor unui triunghi dreptunghic, dar pot fi exprimate în termeni de sinus și cosinus. Acestea sunt **tangenta**, **cotangenta**, **secanta**, și **cosecanta**:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\text{c. o.}}{\text{c. a.}} \quad \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{\text{i.}}{\text{c. a.}}$$

$$\operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\text{c. a.}}{\text{c. o.}} \quad \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\text{i.}}{\text{c. o.}}$$

Definițiile anterioare se aplică doar la unghiuri între 0 și 90 grade (0 și $\pi/2$ radiani). Utilizând cercul unitate (un cerc cu raza de lungime 1) ele pot fi extinse la toate argumentele, pozitive și negative.

Au loc relațiile:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \qquad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = 1 \qquad \operatorname{ctg} 45^\circ = 1$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} \qquad \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Relații trigonometrice

Există o serie de alte relații între elementele (laturi, unghiuri) triunghiurilor oarecare, relații care, folosind funcții trigonometrice, permit calculul unui element necunoscut atunci când se cunosc altele. Astfel de relații sunt de exemplu **teorema sinusurilor** și **teorema cosinusului**.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

Teorema sinusurilor

Dacă laturile unui triunghi oarecare sunt a , b și c și unghiurile opuse acestor laturi sunt A , B și C , atunci teorema sinusurilor enunță:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c},$$

echivalentă cu:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

unde "R" este raza cercului circumscris triunghiului.

Teorema cosinusului

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

EXERCIȚII PROPUSE

1. Dacă x este un unghi ascuțit și $\sin x = \frac{2}{3}$, să se calculeze $\cos x$.
Indicație: Se folosește formula $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
2. Dacă $\sin x = \frac{1}{3}$, să se calculeze $\operatorname{tg} x$.